15 Jordannormalform

$\boxed{\begin{array}{ll} V & \text{endl.-dim VR} \\ \circlearrowleft f & \text{Endomorphismus} \end{array}}$

Standardterminologie

15.1 Def: Ein Jordanblock ist eine (Unter-)Matrix der Form

$$J(m;a) := \begin{pmatrix} a & 1 & & & 0 \\ & a & 1 & & \\ & & a & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & a \end{pmatrix} \in Mat_K(m \times m)$$

für ein $a \in K$.

Nur diese Vorlesung

Ein Hauptraumblock ist eine (Unter-)Matrix der Form

$$H(m_1, \dots, m_k; a) := \begin{pmatrix} \boxed{J(m_1,a)} & & & 0 \\ & \boxed{J(m_2,a)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J(m_k,a)} \end{pmatrix}$$

15.2 Theorem (Jordannormalform, JNF):
Sei f Endomorphismus eines endlich-dim. Vektorraums. Zerfällt χ_f in Linearfaktoren, so hat f bezüglich einer geeigneten Basis B folgende Gestalt:

$$_B M_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{H(\dots;a_1)} & & & 0 \\ & \boxed{H(\dots,a_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{H(\dots,a_\ell)} \end{pmatrix}$$

Dabei sind die Haupraumblöcke, und die Jordanblöcke innerhalb dieser, bis auf Reihenfolge eindeutig durch f bestimmt.

Da über $\mathbb{C}$ jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt (Fundamentalsatz der Algebra 3.21), greift der Satz für **jeden** Endomorphismus eines endlich-dim. $\mathbb{C}$-VRs!

Notiz 15.3: Für die JNF von f gilt:

- $a_1, \ldots, a_\ell$ sind die verschiedenen EW von f.
- Größe von $H(m_1, \ldots, m_k; a_i)$ $\left(= \sum m_j\right)$
  $=$ algebraische Vielfachheit von a_i
  $= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a_i)^r \mid \chi_f\}$
- Größe m des größten Jordanblocks $J(m, a_i)$ zu a_i
  $=$ Exponent von $(X-a_i)$ in μ_f, d.h.
  $= \max\{m \in \mathbb{N} \mid (X-a_i)^m \mid \mu_f\}$

(Das kann man ablesen/nachrechnen.)

Beispiele:

① $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

$$\left.\begin{matrix} \begin{pmatrix} 2&0&0\\0&2&0\\0&0&2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2&0&0\\0&2&0\\0&0&5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2&1&0\\0&2&0\\0&0&2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3&1&0\\0&3&0\\0&0&4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2&1&0\\0&2&1\\0&0&2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7&0&0\\0&5&1\\0&0&5 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \text{ sind bereits in JNF}$$

② $f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circlearrowright \mathbb{R}^2$

$\chi_f = X^2 + 1$ zerfällt nicht in $\mathbb{R}[X]$;
Theorem nicht anwendbar

③ $f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circlearrowright \mathbb{C}^2$

$\chi_f = X^2 + 1 = (X - i) \cdot (X + i)$ in $\mathbb{C}[X]$.
Nach Theorem $\exists$ Basis B von $\mathbb{C}^2$ mit

$${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

④ $f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \circlearrowright \mathbb{R}^2$

$$\chi_f = (1 - X)(3 - X) + 1 = 3 - X - 3X + X^2 + 1$$
$$= X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2.$$

Nach Theorem $\exists$ Basis B von $\mathbb{R}^2$ mit

$${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ODER} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mu_f = \begin{cases} \cancel{(X-2)} & (f - 2 \cdot id \neq 0) \\ (X-2)^2 \end{cases}$$

Also nach Notiz 5.3.

$${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Folgerung: Triagonalisierbarkeit

15.4 Def: Ein Endomorphismus f ist *triagonalisierbar*, falls eine Basis B existiert, in der ${}_B M_B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist:

$$
{}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} a_1 & * & * & * \\ & a_2 & * & * \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}
$$

15.5 Korollar: (aus 15.2/3) f ist genau dann triagonalisierbar, wenn χ_f in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis:

($\Rightarrow$) ist klar, ($\Leftarrow$) folgt sofort aus dem Theorem. $\square$

15.6 Zusammenfassung:

f triagonalisierbar	f diagonalisierbar
$\Updownarrow$ 15.4	$\Updownarrow$ 9.23
χ_f zerfällt in LF	χ_f zerfällt in LF & alg. Vielfachheiten = geom. Vielfachheiten
$\Updownarrow$ 14.16	$\Updownarrow$ 14.19
μ_f zerfällt in LF	μ_f zerfällt in paarweise verschiedene LF

Beweis, Teil 1: Hauptraumzerlegung

Woher kommen die Hauptraumblöcke?

15.7 Def: Sei a EW von f, und sei m der Exponent von $(X-a)$ in der Primfaktorzerlegung von μ_f, also $\mu_f = (X-a)^m \cdot p$ mit p teilerfremd zu $X-a$ (äquiv: $p(a) \neq 0$).
Der Hauptraum von f zum a ist

$$\mathrm{Hau}(f;a) := \ker\left((f-a\cdot \mathrm{id})^m\right)$$

vgl.: $$\mathrm{Eig}(f;a) = \ker(f-a\cdot\mathrm{id})$$

Beispiel:

$f = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \circlearrowleft K^3$ mit $a \neq b$.

$\chi_f = (a-X)^2 \cdot (b-X) = -(X-a)^2 \cdot (X-b)$

$\mu_f = \begin{cases} \cancel{(X-a)(X-b)} \\ (X-a)^2(X-b) \end{cases}$ (kurze Rechnung)

$$\mathrm{Hau}(f;a) = \ker\left((f-a\cdot\mathrm{id})^2\right)$$
$$= \ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}^2\right) = \ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (b-a)^2 \end{pmatrix}\right) = K^2 \oplus 0$$

$$\mathrm{Hau}(f;b) = \ker(f-b\cdot\mathrm{id})$$
$$= \ker\begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \oplus K.$$

15.8 Satz (Hauptraumzerlegung)
Zerfällt χ_f in Linearfaktoren, so zerfällt V in die Haupträume:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \operatorname{Hau}(f;a_i),$$

wobei $a_1,\dots,a_\ell$ die verschiedenen EW von f sind.

Beweis: Da χ_f in LF zerfällt, zerfällt nach Satz 14.16 auch μ_f in LF. Die Aussage folgt daher induktiv aus Spaltungssatz 14.17. $\square$

konkret: $P(a) \neq 0$, $\tilde{P}(a) \neq 0$.

15.9 Satz (Eigenschaften der Haupträume):
Sei a EW von f mit algebraischer Vielfachheit r, also

$$\chi_f = (X-a)^r \cdot P \quad \text{mit } P \text{ teilerfremd zu } X-a,$$
$$\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P} \quad \text{mit } \tilde{P} \text{ teilerfremd zu } X-a.$$

Dann gilt:

1. $\operatorname{Hau}(f;a)$ ist f-stabil
2. $\chi_{f|\operatorname{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X-a)^r$
3. $\mu_{f|\operatorname{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$
4. $\dim \operatorname{Hau}(f;a) = r$
5. $\operatorname{Hau}(f;a) = \ker(f-a\cdot \mathrm{id})^i \quad \forall i \geq m$

Aus 5 folgt insbesondere

$$\operatorname{Hau}(f;a) = \bigcup_{i\geq 0} \ker\left((f-a\cdot\mathrm{id})^i\right)$$

Wir könnten $\operatorname{Hau}(f;a)$ also auch ohne Bezugnahme auf m oder r definieren.

Beweis:

Sei $W_i := \ker((f-a\cdot id)^i)$.

$$\{0\} = W_0 \subseteq W_1 \subseteq W_2 \subseteq W_3 \subseteq \dots \subseteq \underset{\overset{\parallel}{W_m}}{\mathrm{Hau}(f;a)} \subseteq \dots$$

1: Da f mit $(f-a\cdot id)^i$ kommutiert, sind nach Lemma 14.18 alle W_i f-stabil.

3: ist klar aus Spaltungssatz 14.17.

2, 4, 5: Nach Lemma 14.15 folgt aus 1:

$$\chi_{f|W_i} \mid \chi_f \qquad \text{(a)}$$

Andererseits gilt für $A := (X-a)^i$: $A(f|_{W_i}) = 0$, also

$$\mu_{f|W_i} \mid (X-a)^i. \qquad \text{(b)}$$

Da $\chi_{f|W_i}$ und $\mu_{f|W_i}$ nach Satz 14.16 dieselben irreduziblen Faktoren haben, folgt aus (b):

$$\chi_{f|W_i} = \pm (X-a)^{c_i} \quad \text{für ein } c_i \in \mathbb{N}_0$$

und aus (a): $c_i \leq r$.

Das zeigt insbesondere: $\dim W_i \leq r \quad \forall i$.

Andererseits gilt nach Spaltungssatz 14.17

$$V = W_m \oplus W'$$

mit $W' = \ker(P(f))$ und $\mu_{f|W'} = P$.

Aus der Zerlegung folgt

$$\chi_f = \chi_{f|W_m} \cdot \chi_{f|W'}.$$

Da $\chi_{f|W'}$ dieselben irreduziblen Faktoren hat wie $\mu_{f|W'} = P$ (Satz 14.16), und da P teilerfremd zu $(X-a)$ ist, folgt:

$$\chi_{f|W_m} = \pm (X-a)^r$$

Also ist bereits $\dim W_m = r$ und

$$W_m = W_{m+1} = W_{m+2} = \dots$$

$\square$

Beweis Teil 2:
nilpotente Endomorphismen

15.10 Def: Ein Endomorphismus $g \circlearrowright V$ ist nilpotent, wenn $g^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

15.11 Beispiel: Jede strikte obere oder untere $n \times n$-Dreiecksmatrix,

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix},$$

definiert einen nilpotenten Endomorphismus von K^n. Das sieht man durch Nachrechnen, oder durch Cayley-Hamilton, denn $\chi = \pm X^n$.

15.12 Vorüberlegung: Ist $W \subseteq V$ endlich-dim. **g-zyklischer** UVR derart, dass $g|W$ nilpotent ist, so existiert eine Basis von W, bezüglich der g darstellt wird durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis:

Nach Sätzen 14.12 & 14.13 existiert Basis $(\underline{w}, g(\underline{w}), g^2(\underline{w}), \dots, g^{d-1}(\underline{w}))$, bezüglich der g dargestellt wird durch Begleitmatrix zum einem Polynom A, und $A = \mu_{g|W} = \pm \chi_{g|W}$.
Da $g|W$ nilpotent ist, folgt $A = X^d$. Also wird g dargestellt durch

$$\begin{pmatrix} 0 & & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ Koeffizienten von X^d in Graden $0,\dots,d-1$.

Bezüglich der Basis $(g^{d-1}(\underline{w}), g^{d-2}(\underline{w}), \dots, g(\underline{w}), \underline{w})$ wird g also dargestellt durch angegebene Matrix. $\square$

Für Existenzbeweis der JNF reicht es also zu zeigen, dass für einen nilpotenten Endomorphismus $g \circlearrowleft V$ der VR V in eine direkte Summe g-zyklischer UVR zerfällt.
Wir werden einen konkreten Algorithmus sehen, wie man eine solche Zerlegung und somit eine Basis finden kann, in der g JNF hat.
Dazu zunächst:

Einschub: Komplementäre UVR.

15.13 Notiz:

Für einen endlich-dim. VR V mit UVR $U_1, \dots, U_k$ sind äquivalent:

(1) $V = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i$

(2) V hat eine Basis der Form
$(\underline{u}_1^{(1)}, \dots, u_{m_1}^{(1)}, \underline{u}_1^{(2)}, \dots, u_{m_2}^{(2)}, \dots, \underline{u}_1^{(k)}, \dots, \underline{u}_{m_k}^{(k)})$ derart, dass jeweils $(\underline{u}_1^{(i)}, \dots, u_{m_i}^{(i)})$ Basis von U_i ist.

(3) Für beliebige Basen $(\underline{u}_1^{(i)}, \dots, u_{m_i}^{(i)})$ von U_i ist
$(\underline{u}_1^{(1)}, \dots, u_{m_1}^{(1)}, \underline{u}_1^{(2)}, \dots, u_{m_2}^{(2)}, \dots, \underline{u}_1^{(k)}, \dots, \underline{u}_{m_k}^{(k)})$
Basis von V.

(Zeige (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1))

15.14 Def: Ein komplementärer UVR zu einem gegebenen UVR $W \subseteq V$ ist ein UVR $U \subseteq V$ mit

$$V = W \oplus U.$$

15.15 Notiz: Zu jedem UVR existiert ein komplementärer UVR.

(Wende Basisergänzungssatz an auf Basis von W.)

Für konkrete Konstruktion eines komplementären UVR hilft folgende Variante:

15.15⁺ Notiz: Sei $W \subseteq V$, und sei $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ Basis von V. Dann existiert Teilbasis $(\underline{v}_{i_1}, \dots, \underline{v}_{i_k})$ derart, dass $U := \langle \underline{v}_{i_1}, \dots, \underline{v}_{i_k} \rangle$ ein zu W komplementärer UVR ist.

(Wende Basisergänzungs- und -auswahlsatz an auf

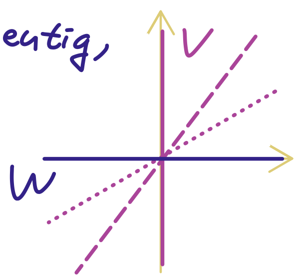
$$\underbrace{(\text{Basis von } W)}_{\text{linear unabh.}} \text{ „}\subseteq\text{“ } \underbrace{(\text{Basis von } W, \text{Basis von } V)}_{\text{Erzeugendensystem von } V}.$$

)

Ist also z.B. $W \subseteq \mathbb{R}^3$ ein 2-dimensionaler UVR, so ist nach Notiz 15.15⁺ einer der drei UVR $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ komplementär zu W.

⚠ Komplementäre UVR sind nicht eindeutig,

z.B.
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \dots \end{aligned}$$



Nur in euklidischen & unitären VR gibt es ein eindeutiges orthogonales Komplement (Def. 10.23).

15.16 Satz (JNF im nilpotenten Fall)

Zu jedem nilpotenten Endomorphismus $g \in V$ eines endlich-dim. VR existiert eine Jordanbasis, also eine Basis B, in der ${}_BM_B(g)$ JNF hat:

$$ {}_BM_B(g) = H(m_1, \dots, m_k; 0) = \begin{pmatrix} \boxed{J(m_1,0)} & & & \mathcal{O} \\ & \boxed{J(m_2,0)} & & \\ & & \ddots & \\ \mathcal{O} & & & \boxed{J(m_k,0)} \end{pmatrix} $$

$$ \text{mit} \qquad J(m;a) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathcal{O} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathcal{O} & & & 0 \end{pmatrix} $$

Dabei sind die Blockgrößen $m_1, \dots, m_k$ eindeutig durch g bestimmt.

Konstruktiver Beweis:

Sei m minimal mit der Eigenschaft $g^m = 0$.

Wir haben eine Kette von UVR

$$ V = \ker(g^m) \geq \ker(g^{m-1}) \geq \dots \geq \ker(g^2) \geq \ker(g) \geq 0 $$

Wähle Komplement U_m von $\ker(g^{m-1})$ in V, sodass also gilt:

$$ V = \boxed{\ker(g^{m-1}) \oplus U_m} \quad (+) \text{ Zerlegung von } \ker(g^m) $$

Es ist
$$ \ker(g^{m-2}) \leq \ker(g^{m-1}) \qquad (\text{s.o.}), $$
$$ g(U_m) \leq \ker(g^{m-1}) \qquad (\text{denn } U_m \leq \ker(g^m)), $$

und diese UVR bilden eine direkte Summe:

Angenommen $\underline{v} + g(\underline{u}_m) = \underline{0}$

für ein $\underline{v} \in \ker(g^{m-2})$, $\underline{u}_m \in U_m$. Wende g^{m-2} an:

$$ g^{m-1}(\underline{u}_m) = \underline{0}, $$

also $\quad \underline{y}_m \in \ker(g^{m-1})$. Die Zerlegung (†) implizient nun $\underline{y}_m = \underline{0}$, also auch $g(\underline{y}_m) = \underline{v} = \underline{0}$.

Es ist also

$$\ker(g^{m-2}) \oplus g(U_m) \subseteq \ker(g^{m-1})$$

Wähle komplementären UVR U_{m-1} in $\ker(g^{m-1})$ sodass also gilt:

$$V = \boxed{\ker(g^{m-2}) \oplus \left\{ \begin{matrix} g(U_m) \\ \oplus \\ U_{m-1} \end{matrix} \right.} \oplus U_m$$

(‡) Zerlegung von $\ker(g^{m-1})$

Es ist
$$\begin{aligned} \ker(g^{m-3}) &\subseteq \ker(g^{m-2}) && \text{(s.o.)} \\ g^2(U_m) &\subseteq \ker(g^{m-2}) && (\text{denn } U_m \subseteq \ker(g^m)) \\ g(U_{m-1}) &\subseteq \ker(g^{m-2}) && (\text{denn } U_{m-1} \subseteq \ker(g^{m-1})) \end{aligned}$$

Ferner bilden diese UVR eine direkte Summe:

Angenommen $\quad \underline{v} + g^2(\underline{y}_m) + g(\underline{y}_{m-1}) = \underline{0}$

für $\underline{v} \in \ker(g^{m-3})$, $\underline{y}_m \in U_m$, $\underline{y}_{m-1} \in U_{m-1}$.

Wende g^{m-3} an:

$$\begin{aligned} g^{m-1}(\underline{y}_m) + g^{m-2}(\underline{y}_{m-1}) &= \underline{0}, && \text{also} \\ g^{m-2}(g(\underline{y}_m) - \underline{y}_{m-1}) &= \underline{0}, && \text{also} \\ g(\underline{y}_m) - \underline{y}_{m-1} &\in \ker(g^{m-2}) \end{aligned}$$

Aus der direkten Summe (‡) folgt daher:

$$g(\underline{y}_m) = \underline{y}_{m-1} = \underline{0},$$

und somit $g^2(\underline{y}_m) = g(\underline{y}_{m-1}) = \underline{v} = \underline{0}$.

Es ist also

$$\ker(g^{m-3}) \oplus g^2(U_m) \oplus g(U_{m-1}) \subseteq \ker(g^{m-2}).$$

Wähle komplementären UVR U_{m-2} in $\ker(g^{m-2})$, sodass also gilt:

$$V = \boxed{\ker(g^{m-3}) \oplus \left\{\begin{array}{c} g^2(U_m) \\ \oplus \\ g(U_{m-1}) \\ \oplus \\ U_{m-2} \end{array}\right.} \begin{array}{ccc} \oplus & g(U_m) & \oplus\ U_m \\ & \oplus & \\ \oplus & U_{m-1} & \\ & & \\ & & \end{array}$$

Zerlegung von $\ker(g^{m-2})$

Mit analogen Argumenten erhalten wir induktiv eine Zerlegung

$$V = \left\{\begin{array}{ccccccccc} g^{m-1}(U_m) & \oplus & \cdots\cdots & \oplus & g^2(U_m) & \oplus & g(U_m) & \oplus & U_m \\ \oplus & & & & \oplus & & \oplus & & \\ g^{m-2}(U_{m-1}) & \oplus & \cdots\cdots & \oplus & g(U_{m-1}) & \oplus & U_{m-1} & & \\ \oplus & & & & \oplus & & & & \\ g^{m-3}(U_{m-2}) & \oplus & \cdots\cdots & \oplus & U_{m-2} & & & & \\ \oplus & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ \oplus & & & & & & & & \\ U_1 & & & & & & & & \end{array}\right.$$

wobei für U_i jeweils gilt:

$$U_i \subseteq \ker(g^i) \quad \text{und} \quad U_i \cap \ker(g^{i-1}) = \{\underline{0}\}. \qquad (*)$$

Insbesondere definiert g Isomorphismen

$$g^i(U_j) \xleftarrow{\cong} g^{i-1}(U_j) \qquad \text{für alle } i < j \qquad (\text{und } g^j(U_j) = 0).$$

(Es reicht zu zeigen $\ker\left(g|_{g^{i-1}(U_j)}\right) = \{\underline{0}\}$.
Sei also $\underline{v} \in g^{i-1}(U_j)$ mit $g(\underline{v}) = \underline{0}$.
Dann ist $\underline{v} = g^{i-1}(\underline{u}_j)$ für $\underline{u}_j \in U_j$ mit $g^i(\underline{u}_j) = \underline{0}$,
und wegen $i \leq j-1$ erst recht $g^{j-1}(\underline{u}_j) = \underline{0}$.
Also folgt aus $(*)$ $\underline{u}_j = \underline{0}$; also $\underline{v} = \underline{0}$.)

Für einen beliebigen Vektor $\underline{u} \in U_j$ erhalten wir daher einen g-zyklischen UVR

$$\langle \underline{u}, g(\underline{u}), \ldots, g^{j-1}(\underline{u}) \rangle$$

mit Jordanbasis

$$(g^{j-1}(\underline{u}), \ldots, g(\underline{u}), \underline{u}).$$

Um eine Jordanbasis für ganz V zu erhalten, wählen wir nun einfach Basen $(\underline{u}_1^{(j)}, \dots, \underline{u}_{k_j}^{(j)})$ von U_j, für jedes j. Dann ist

$$\boxed{\begin{array}{cccccc} g^{m-1}(\underline{u}_1^{(m)}) & \cdots & g^2(\underline{u}_1^{(m)}) & g(\underline{u}_1^{(m)}) & \underline{u}_1^{(m)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ g^{m-1}(\underline{u}_{k_m}^{(m)}) & \cdots & g^2(\underline{u}_{k_m}^{(m)}) & g(\underline{u}_{k_m}^{(m)}) & \underline{u}_{k_m}^{(m)} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} g^{m-2}(\underline{u}_1^{(m-1)}) & \cdots & g(\underline{u}_1^{(m-1)}) & \underline{u}_1^{(m-1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g^{m-2}(\underline{u}_{k_{m-1}}^{(m-1)}) & \cdots & g(\underline{u}_{k_{m-1}}^{(m-1)}) & \underline{u}_{k_{m-1}}^{(m-1)} \end{array}}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{u}_1^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{u}_{k_1}^{(1)} \end{array}}$$

eine Jordanbasis für V (von links nach rechts von oben nach unten).

(Beispiel mit $\dim U_3 = 1$, $\dim U_2 = 3$, $\dim U_1 = 2$:

$$\begin{array}{ccc} g^2(\underline{u}_1^{(3)}) & g(\underline{u}_1^{(3)}) & \underline{u}_1^{(3)} \\ g(\underline{u}_1^{(2)}) & \underline{u}_1^{(2)} & \\ g(\underline{u}_2^{(2)}) & \underline{u}_2^{(2)} & \\ g(\underline{u}_3^{(2)}) & \underline{u}_3^{(2)} & \\ \underline{u}_1^{(1)} & & \\ \underline{u}_2^{(1)} & & \end{array}$$

Jordanbasis:

$$(g^2(\underline{u}_1^{(3)}), g(\underline{u}_1^{(3)}), \underline{u}_1^{(3)}, g(\underline{u}_1^{(2)}), \underline{u}_1^{(2)}, g(\underline{u}_2^{(2)}), \underline{u}_2^{(2)}, g(\underline{u}_3^{(2)}), \underline{u}_3^{(2)}, \underline{u}_1^{(1)}, \underline{u}_2^{(1)})$$

JNF:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & & \text{\Large 0} & \\ & & 0 & & & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & & & 0 & & \\ & \text{\Large 0} & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(Anzahl der Jordankästen der Größe n) $= \dim \mathcal{U}_n$, und $\dim \mathcal{U}_n$ ist (im Gegensatz zu $\mathcal{U}_n$ selbst) von allen Wahlen unabhängig. Also ist die JNF bis auf Reihenfolge der Blöcke eindeutig durch g bestimmt. $\square$

Beweis zu Theorem 15.2 (JNF): $V \circlearrowleft f$

Nach Satz 15.8 ist $V = \bigoplus_i \mathrm{Hau}(f;a_i)$, und die Haupträume sind f-stabil. Also reicht es zu zeigen, dass jeweils $\mathrm{Hau}(f;a)$ eine Basis besitzt, in der $f|_{\mathrm{Hau}(f;a)}$ durch einen Hauptraumblock $H(\ldots;a)$ gegeben ist.

Betrachte $g := (f - a\cdot \mathrm{id})|_{\mathrm{Hau}(f;a)}$.

Nach Definition ist $g^m = (f-a\cdot\mathrm{id})^m|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = 0$ für ein m. Also kann g nach Satz 15.16 durch einen Hauptraumblock $H(\ldots;0)$ dargestellt werden, und somit $f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = g + a\cdot\mathrm{id}$ durch $H(\ldots;a)$.

Eindeutigkeit folgt aus Eindeutigkeit in Satz 15.16. $\square$

15.17 Rezept: Jordanbasis finden $\quad f \circlearrowright V$

SCHRITT 1:

Bestimme χ_f und zerlege χ_f in Linearfaktoren:

$$\chi_f = \pm \prod_i (X - a_i)^{r_i}$$

(Falls χ_f nicht in LF zerfällt, existiert keine Jordanbasis.)

SCHRITT 2:

Bestimme $\mu_f = \prod_i (X - a_i)^{m_i}$

($1 \leq m_i \leq r_i$ nach Cayley-Hamilton (14.7) und Satz 14.16.)

SCHRITT 3:

Berechne für jeden EW a_i mit $g_i := f - a_i \cdot id$

- Hauptraum $\mathrm{Hau}(f; a_i) = \ker(g_i^{m_i})$, und
- Unterräume $\ker(g_i^j)$ für $j < m_i$

SCHRITT 4:

Bestimme mit dem Verfahren aus dem Beweis zu Satz 15.16 Jordanbasis zu jedem g_i, und setze diese zu Jordanbasis von f zusammen.

Beispiel:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \circlearrowright \mathbb{R}^4$$

SCHRITT 1:

Entwicklung nach 1. Zeile

$$\chi_f = \det \begin{pmatrix} 1-X & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-X & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-X \end{pmatrix} = (1-X)\cdot(2-X)(1-X)(2-X)$$

$$= \underline{\underline{(X-1)^2 (X-2)^2}}$$

(An dieser Stelle können wir aus den algebraischen Vielfachheiten der EW nach Notiz 15.3 bereits die Dimensionen der Haupträume bzw. der Hauptraumblöcke ablesen.

Hier: $\dim \mathrm{Hau}(f;1) = \dim \mathrm{Hau}(f;2) = 2$.

Mögliche JNF:

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&2&0\\ 0&0&0&2 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&2&1\\ 0&0&0&2 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&2&0\\ 0&0&0&2 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&2&2\\ 0&0&0&2 \end{pmatrix}$$)

SCHRITT 2.

$$\mu_f = \begin{cases} (X-1)(X-2) & \text{oder} \\ (X-1)(X-2)^2 & \text{oder} \\ (X-1)^2(X-2) & \text{oder} \\ (X-1)^2(X-2)^2 \end{cases}$$

$$(f-1\cdot id)(f-2\cdot id) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&1&0&7\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1&0&0&0\\ 1&0&0&7\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&7\\ & \cdots & & \end{pmatrix} \neq 0$$

$$(f-1\cdot id)(f-2\cdot id)^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&1&0&7\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1&0&0&0\\ 1&0&0&7\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1&0&0&0\\ 1&0&0&7\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&1&0&7\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = 0$$

Also $\mu_f = \underline{\underline{(X-1)\cdot(X-2)^2}}$.

(An dieser Stelle folgt nach Notiz 15.3:

Eine JNF von f ist $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&2&1\\ 0&0&0&2 \end{pmatrix}$)

SCHRITT 3: Haupträume & Filtrierung

$$\mathrm{Hau}(f;1) = \ker(f - 1\cdot \mathrm{id}) = \ker \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&1&0&7\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = \overset{\text{LGS lösen}}{\ldots} = \left\langle \begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Hau}(f;2) = \ker\left((f-2\cdot\mathrm{id})^2\right) = \ker \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = \ldots = \left\langle \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\supseteq$$

$$\ker(f-2\cdot\mathrm{id}) = \ker \begin{pmatrix} -1&0&0&0\\ 1&0&0&7\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = \ldots = \left\langle \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

SCHRITT 4:

Jordanbasis von $\mathrm{Hau}(f;1)$:

$\mathrm{Hau}(f;1) = \mathrm{Eig}(f;1)$, also können wir Basis $\left(\begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \right)$ von oben verwenden.

Jordanbasis von $\mathrm{Hau}(f;2)$: $\quad g := f - 2\cdot\mathrm{id}$

Wähle zunächst U_2 mit $\ker(g^2) = \begin{cases} \ker(g^1) \\ \oplus \\ U_2 \end{cases}$

Hier offenbar $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle$ möglich.

Wähle sodann U_1 mit $\ker(g^1) = \begin{cases} \overbrace{\ker(g^0)}^{=0} \\ \oplus \\ g(U_2) \oplus U_1 \end{cases}$,

also $$\left\langle \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0\\7\\0\\0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus U_1$$

Offenbar hier $U_1 = 0$.

Also hat $\mathrm{Hau}(f;2)$ Jordanbasis $\left(\begin{pmatrix} 0\\7\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right)$.

Bild unter g

Basisvektor aus U_2

Insgesamt ergibt sich die Jordanbasis

$$\left(\underset{\underline{b}_1}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \underset{\underline{b}_2}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \underset{\underline{b}_3}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \underset{\underline{b}_4}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} \right) \quad \text{für} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Big(\text{Probe:} \quad f(\underline{b}_1) \quad f(\underline{b}_2) \quad f(\underline{b}_3) \quad f(\underline{b}_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Big)$$

$$\begin{vmatrix} 1\cdot \underline{b}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1\cdot \underline{b}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\cdot \underline{b}_3 & 1\cdot \underline{b}_3 + \\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot \underline{b}_4 \end{vmatrix}$$

Jordan-Chevalley-Zerlegung

Claude Chevalley (* 11. Februar 1909 in Johannesburg, Südafrika; † 28. Juni 1984 in Paris) war ein französisch-amerikanischer Mathematiker und Mitglied von Bourbaki.

Marie Ennemond Camille Jordan, genannt Camille Jordan, (* 5. Januar 1838 in Lyon; † 21. Januar 1922 in Paris) war ein französischer Mathematiker.

15.18 Def:

Eine Jordan-Chevalley-Zerlegung (kurz: JC-Zerlegung) eines Endomorphismus $f \circlearrowleft V$ ist eine Zerlegung

$$f = d + n,$$

für die gilt: d diagonalisierbar
n nilpotent
f, d, n kommutieren in $\mathrm{End}_K(V)$

Eine JC-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ ist entsprechend eine Zerlegung

$$A = D + N$$

für die gilt: D diagonalisierbar
N nilpotent
A, D, N kommutieren in $\mathrm{Mat}_K(n \times n)$.

15.19 Korollar (Existenz einer JC-Zerlegung)

Für einen Endomorphismus f eines endlich-dim. Vektorraums gilt:

Zerfällt χ_f in Linearfaktoren, so besitzt f eine JC-Zerlegung.

Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ gilt:

Zerfällt χ_A in Linearfaktoren, so besitzt f eine JC-Zerlegung.

Genauer:

Sei J eine Jordanbasis von A, aufgefasst als Matrix, und $\hat{A}$ die zugehörige JNF, sodass also gilt:

$$A = J\hat{A}J^{-1}$$

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "A"] \arrow[dr, "1"'] & & & K^n \arrow[dl, "1"] \\
& K^n \arrow[r] & K^n & \\
K^n \arrow[ur, "J"] \arrow[rrr, "\mathrm{JNF}\ \hat{A}"'] & & & K^n \arrow[ul, "J"']
\end{tikzcd}$$

Sei

$\hat{D} :=$ Diagonalmatrix mit Einträgen der Diagonale von $\hat{A}$,

$\hat{N} := \hat{D} - \hat{A}$.

Dann ist $\hat{A} = \overset{\text{diagonal}}{\hat{D}} + \hat{N}$ eine JC-Zerlegung von $\hat{A}$,

und $A = \underbrace{J\hat{D}J^{-1}}_{\text{diagonalisierbar}} + J\hat{N}J^{-1}$ eine JC-Zerlegung von A.

Beweis:

Die Aussage über Endomorphismen folgt aus der Aussage über Matrizen.

JC-Zerlegung der JNF $\hat{A}$:

Jede obere Dreiecksmatrix $\hat{A}$ hat eine kanonische Zerlegung $\hat{A} = \hat{D} + \hat{N}$ mit $\hat{D}$ Diagonalmatrix und N nilpotent (siehe Beispiel 15.11):

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \;\; a_n \end{pmatrix}}^{\hat{A}} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \;\; a_n \end{pmatrix}}^{\hat{D}} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots \;\; 0 \end{pmatrix}}^{\hat{N}}$$

Aber i. A. kommutieren $\hat{A}, \hat{D}, \hat{N}$ nicht.

Ist $\hat{A}$ eine Matrix in JNF, dann kommutieren $\hat{A}, \hat{D}, \hat{N}$ aber: das kann man für jeden Jordanblock

$$J(n;a) = a\cdot 1\!\!1_n + J(n;0)$$

leicht nachrechnen.

JC-Zerlegung von A:

Aus $A = J\hat{A}J^{-1}$ und $\hat{A} = \hat{D} + \hat{N}$

folgt $A = J\hat{D}J^{-1} + J\hat{N}J^{-1}$.

Da $\hat{D}$ Diagonalmatrix ist,

ist $J\hat{D}J^{-1}$ diagonalisierbar.

Da $\hat{N}$ nilpotent ist,

ist auch $J\hat{N}J^{-1}$ nilpotent.

$$\left((J\hat{N}J^{-1})^k = J\hat{N}\cancel{J^{-1}}\cdot\cancel{J}\hat{N}J^{-1}\cdot \ldots \cdot J\hat{N}J^{-1} \right.$$
$$\left. = JN^kJ^{-1} \right)$$

Da $\hat{A}, \hat{D}, \hat{N}$ kommutieren, kommutieren auch $J\hat{A}J^{-1}, J\hat{D}J^{-1}, J\hat{N}J^{-1}$. $\square$

Beispiel:

Für $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$ finden wir Jordanbasis $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

mit $\hat{A} = J^{-1}AJ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \underbrace{3\cdot 1\!\!1}_{\hat{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{N}}.$$

Also ist

$$A = J\hat{D}J^{-1} + J\hat{N}J^{-1}$$
$$= J\cdot 3\cdot 1\!\!1\cdot J^{-1} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= 3\cdot\cancel{J}\cdot\cancel{J^{-1}} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}}_{N}$$ eine JC-Zerlegung von A.

(Probe: $AD = DA$ ✓, $AN = NA$ … ✓, $DN = ND$ ✓, $N^2 = 0$ … ✓.)

15.20 Satz (Eindeutigkeit der JC-Zerlegung)
Besitzt f eine JC-Zerlegung $f = d + u$, so sind d und u eindeutig durch f bestimmt.

15.21 Lemma: Für eine JC-Zerlegung $f = d+u$ gilt:
$$\mathrm{Hau}(f;a) = \mathrm{Eig}(d;a)$$

Beweis:

Da u mit f und d kommutiert, sind
$\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f-a\cdot\mathrm{id})^m) = \bigcup_{i\geq 0} \ker((f-a\cdot\mathrm{id})^i)$ und
$\mathrm{Hau}(d;a) = \ker(d-a\cdot\mathrm{id}) = \bigcup_{i\geq 0} \ker((d-a\cdot\mathrm{id})^i)$
u-stabil. Sei $k\in\mathbb{N}$ mit $u^k = 0$.

($\subseteq$) Sei $\underline{v} \in \mathrm{Hau}(f;a)$. Dann ist für jedes $N\in\mathbb{N}$:
$$(d-a\cdot\mathrm{id})^N(\underline{v}) = (f-a\cdot\mathrm{id}+(-u))^N(\underline{v})$$

Binomischer Lehrsatz im Ring $\mathrm{End}_K(V)$ (siehe 15.22 unten)
$$= \sum_{i=1}^{N} \binom{N}{i} (f-a\cdot\mathrm{id})^i \circ (-u)^{N-i}(\underline{v})$$

Wähle $N = m+k$. Dann ist

für $i\leq m$: $N-i\geq k$, daher $(-u)^{N-i}(\underline{v}) = \underline{0}$

für $i\geq m$: $(f-a\cdot\mathrm{id})^i(\underbrace{u^{N-i}(\underline{v})}) = \underline{0}$.

$\in \mathrm{Hau}(f;a)$, da $\mathrm{Hau}(f;a)$ u-stabil

Also ist für dieses N
$$(d-a\cdot\mathrm{id})^N(\underline{v}) = \underline{0}$$
Somit $\underline{v} \in \mathrm{Hau}(d;a)$.

($\supseteq$) analog. $\square$

Notiz 15.22 (Binomischer Lehrsatz):

Für **kommutierende** Elemente a,b eines Rings gilt:

d.h. $ab=ba$
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$
(für alle $n\in\mathbb{N}$)

Beweis zu 15.20:

Seien $f = d_1 + u_1 = d_2 + u_2$ zwei JC-Zerlegungen.

Es reicht zu zeigen: $d_1 = d_2$.

Nach 15.21 wissen wir bereits:

$$\mathrm{Eig}(d_1, a) = \mathrm{Eig}(d_2, a)$$

für alle a. Da d_1 und d_2 diagonalisierbar sind, ist

$$V = E_1 \oplus \ldots \oplus E_l$$

mit $E_i = \mathrm{Eig}(d_1; a_i) = \mathrm{Eig}(d_2; a_i)$ für die verschiedenen EW a_i. Offenbar

$d_1|_{E_i} = d_2|_{E_i}$ für alle i. Somit $d_1 = d_2$. $\square$